Estás Integrales se pueden ver como inmediatas con la regla de la cadena pero a veces esta técnica nos puede ayudar a resolver la integral.
Antes de ver los ejercicios resueltos vais a ver el video del siguiente enlace:
https://www.youtube.com/watch?v=PE3qQZV8UMM

Método de sustitución

Pretendemos calcular una integral $\int h(x)\, dx$ en la que somos capaces de reconocer la igualdad siguiente:

$$h(x) = f[g(x)] \cdot g'(x)$$

y supongamos que $\int f(t)\, dt = F(t)$ nos resulta fácil de obtener.

Entonces, en la integral:

$$I = \int h(x)\, dx = \int f[g(x)] \cdot g'(x)\, dx$$

debemos hacer el **cambio de variable** siguiente:

$$u = g(x) \qquad du = g'(x)\, dx$$

Queda, pues, $I = \int f(u)\, du = F(u) = F[g(x)]$.

En la página anterior hemos resuelto muchas integrales que responden a este esquema y en las que hemos sido capaces de ver el cambio de variable sin necesidad de explicitarlo. Sin embargo, lo habitual es que no se pueda efectuar mentalmente la sustitución y haya que explicitarla. Veamos algunos casos.

Ejercicio resuelto

1 a) $\int e^{\sqrt{x^2-2x}} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\, dx$

b) $\int \dfrac{1}{1+e^{2\sqrt{x}}} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

c) $\int \dfrac{sen\, x \cos x\, dx}{\sqrt{1-sen^4 x}}$

d) $\int x \ln (x^2-5)\, dx$

a) Efectuamos el cambio $u = \sqrt{x^2-2x}$, $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-2x}}(2x-2)\, dx = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\, dx$

$$I = \int e^u\, du = e^u + k = e^{\sqrt{x^2-2x}} + k$$

b) Advertimos que $e^{2\sqrt{x}} = (e^{\sqrt{x}})^2$, por tanto: $u = e^{\sqrt{x}}$, $du = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\, dx$

$$I = \int \frac{1}{1+(e^{\sqrt{x}})^2} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{1}{1+u^2} \cdot 2du = 2\, arc\, tg\, u + k = 2\, arc\, tg\, e^{\sqrt{x}} + k$$

c) $sen^4 x = (sen^2 x)^2$, por tanto: $u = sen^2 x$, $du = 2 sen\, x \cos x\, dx$

$$I = \int \frac{\frac{1}{2} du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2} arc\, sen\, u + k = \frac{1}{2} arc\, sen\, (sen^2 x) + k$$

d) $u = x^2-5$, $du = 2x\, dx$

$$I = \frac{1}{2}\int \ln u\, du = \frac{1}{2}[u \ln u - u] + k = \frac{(x^2-5)\ln(x^2-5)}{2} - \frac{x^2-5}{2} + k$$

Este paso se hará usando Integración por partes

Ejercicios propuestos

2 a) $\int \sqrt{x^3-3x^2+5} \cdot (x^2-2x)\, dx$ b) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-e^{2\sqrt{x}}}} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$ c) $\int \dfrac{\cos^3 x\, dx}{sen^4 x}$

~~d) $\int (x^2+1) \ln (x^3+3x)\, dx$~~ e) $\int \dfrac{sen\, x \cos x}{1+sen^4 x}\, dx$ f) $\int e^{x+\sqrt{x}} \left(\dfrac{6x+3\sqrt{x}}{x} \right) dx$

Antes de ver los ejercicios resueltos vais a ver videos de los siguientes enlaces:

https://www.youtube.com/watch?v=yF2ZO0lM4hI
https://www.youtube.com/watch?v=9CoOB5d9gqM

Otros cambios de variable

Si en la integral $I = \int f(x)\, dx$ efectuamos el cambio $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)\, dt$ queda de la siguiente forma:

$$I = \int f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt$$

Pues bien, si $f(x)$ no se sabe integrar y $f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)$ es una función cuya integración sí sabemos abordar, entonces el cambio de variable habrá resultado muy favorable. Veamos unos ejemplos.

Ejercicio resuelto

1 *a)* $\int x\sqrt{x+5}\, dx$

a) Para eliminar la raíz cuadrada se nos ocurre el siguiente cambio:

$$x + 5 = t^2 \rightarrow dx = 2t\, dt \quad (x = t^2 - 5)$$

$$I = \int (t^2-5)\cdot\sqrt{t^2}\cdot 2t\, dt = \int (t^2-5)\, t\cdot 2t\, dt = \int (2t^4 - 10t^2)\, dt = \frac{2t^5}{5} - \frac{10t^3}{3} + k$$

Ahora deshacemos el cambio: $t = \sqrt{x+5}$

$$I = \frac{2\sqrt{(x+5)^5}}{5} - \frac{10\sqrt{(x+5)^3}}{3} + k$$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

b) Para eliminar las dos raíces hacemos $x = t^6$ y, por tanto, $dx = 6t^5\, dt$:

$$I = \int \frac{6t^5\, dt}{t^{6/2} + t^{6/3}} = \int \frac{6t^5\, dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3}{t+1}\, dt = 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - ln|t+1|\right) + k = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\, ln|t+1| + k$$

Para volver a la variable x, hacemos $t = \sqrt[6]{x}$:

$$I = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\, ln|\sqrt[6]{x} + 1| + k$$

c) $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$

c) La relación trigonométrica $sen^2\, \alpha + cos^2\, \alpha = 1 \rightarrow 1 - sen^2\, \alpha = cos^2\, \alpha$ nos sirve de inspiración para poder quitar la raíz:

$$x = sen\, \alpha \rightarrow dx = cos\, \alpha\, d\alpha$$

$$I = \int \sqrt{1 - sen^2\, \alpha}\, cos\, \alpha\, d\alpha = \int \sqrt{cos^2\, \alpha}\, cos\, \alpha\, d\alpha = \int cos^2\, \alpha\, d\alpha$$

El resultado de esta integral lo conocemos (*Ejercicio resuelto* de la página 331).

$$I = \frac{\alpha}{2} + \frac{sen\, 2\alpha}{4} + k \xrightarrow{\alpha = arc\ sen\ x} I = \frac{arc\ sen\ x}{2} + \frac{sen\,(2\, arc\ sen\ x)}{4} + k$$

Ejercicios propuestos

3 $\int \sqrt{x-4}\,(x+5)\, dx$

4 $\int \frac{\sqrt[3]{x-1} + x - 1}{\sqrt{(x-1)^3}}\, dx$

5 $\int \sqrt{4-x^2}\, dx$