3 Integración "por partes"

La fórmula para la derivada de un producto es:

$$D[u(x) \cdot v(x)] = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

que, expresada en notación diferencial, queda así:

$$d[u(x) \cdot v(x)] = du(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot dv(x)$$

Despejando el último sumando, queda:

$$u(x)\, dv(x) = d[u(x) \cdot v(x)] - v(x)\, du(x)$$

Si integramos en los dos miembros, se obtiene:

$$\int u(x)\, dv(x) = u(x) \cdot v(x) - \int v(x)\, du(x)$$

De forma abreviada: $\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$

Para memorizar esta expresión se suele usar la siguiente regla nemotécnica:

Un día ví una vaca vestida de uniforme.

Ten en cuenta

El resultado de integrar una función puede ser una función más complicada (por ejemplo, si es polinómica). Al derivar ocurre lo contrario. Cuando integres por partes, conviene que intentes encontrar funciones más fáciles de integrar.

Esta fórmula permite calcular la integral $\int u\, dv$ a partir de la integral $\int v\, du$. Para poder utilizarla, hemos de reconocer que la integral que se nos plantea es de la forma $\int u\, dv$, y apreciar que la integral $\int v\, du$ resulta más asequible que la anterior.

Ejercicios resueltos

1 *Calcular:*

a) $I = \int x\, e^x\, dx$

b) $I = \int x^3 \ln x\, dx$

c) $I = \int \ln x\, dx$

a) Al derivar x, **se simplifica**, y al integrar e^x, **no se complica**. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} u = x \quad \rightarrow \quad du = dx \\ dv = e^x\, dx \quad \rightarrow \quad v = \int e^x\, dx = e^x \end{array}\right\} I = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + k$$

b) Puesto que la derivada de $\ln x$ es $\frac{1}{x}$, se nos ocurre asignar las funciones del siguiente modo:

$$\left.\begin{array}{l} u = \ln x \quad \rightarrow \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^3\, dx \quad \rightarrow \quad v = \int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} \end{array}\right\}$$

$$I = (\ln x) \cdot \frac{x^4}{4} - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + k$$

c) En muchos casos, como este, conviene tomar $dv = dx$:

$$\left.\begin{array}{l} u = \ln x \quad \rightarrow \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \quad \rightarrow \quad v = x \end{array}\right\} I = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + k$$

Este ejercicio es el que debemos hacer si nos preguntan esta integral y no usar la expresión que aparecía en el listado de integrales inmediatas en la página 330 y en la 332. También sería necesario en el ejercicio resuelto 1 apartado d de la página 334.

Ejercicios propuestos

1 Calcula:

$\int x \operatorname{sen} x\, dx$

2 Calcula:

$\int x \operatorname{arc\,tg} x\, dx$

En la web Ejercicios para calcular primitivas de funciones trigonométricas inversas.

Ejercicios resueltos

2 *Resolver:*

$$\int x^3\, e^x\, dx$$

$$I = \int x^3 e^x\, dx \quad \left.\begin{array}{l} u = x^3 \quad \to \quad du = 3x^2\, dx \\ dv = e^x\, dx \quad \to \quad v = e^x \end{array}\right\}$$

$$I = x^3 e^x - \int e^x\, 3x^2\, dx = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x\, dx$$

$$I_1 = \int x^2 e^x\, dx \quad \left.\begin{array}{l} u_1 = x^2 \quad \to \quad du_1 = 2x\, dx \\ dv_1 = e^x\, dx \quad \to \quad v_1 = e^x \end{array}\right\}$$

$$I_1 = x^2\, e^x - \int e^x\, 2x\, dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\, dx$$

$I_2 = \int x\, e^x\, dx = xe^x - e^x$ (visto en el *Ejercicio resuelto 1a*)

$$I = x^3 e^x - 3I_1 = x^3 e^x - 3[x^2\, e^x - 2I_2] = x^3 e^x - 3[x^2 e^x - 2(xe^x - e^x)] + k =$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6(xe^x - e^x) + k = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x + k$$

3 *Calcular:*

$$\int cos^2\, x\, dx$$

Esta integral la hemos resuelto en la página 331 aplicando fórmulas trigonométricas y hemos obtenido el siguiente resultado:

$$I = \frac{x}{2} + \frac{sen\, 2x}{4} + k$$

Pero también se puede resolver integrando por partes:

$$I = \int cos^2\, x\, dx \quad \left.\begin{array}{l} u = cos\, x \quad \to \quad du = -sen\, x\, dx \\ dv = cos\, x\, dx \quad \to \quad v = sen\, x \end{array}\right\}$$

$$I = cos\, x\, sen\, x - \int sen\, x\, (-sen\, x\, dx) = cos\, x\, sen\, x + \int sen^2\, x\, dx =$$

$$= cos\, x\, sen\, x + \int (1 - cos^2\, x)\, dx = cos\, x\, sen\, x + \int dx - \int cos^2\, x\, dx$$

Es decir: $I = cos\, x\, sen\, x + x - I \;\to\; I = \dfrac{cos\, x\, sen\, x + x}{2} + k$

¿Coincide con el resultado anterior? Comprueba que sí, teniendo en cuenta la identidad $sen\, 2x = 2sen\, x\, cos\, x$.

4 *Calcular:*

$$\int \frac{ln\, x}{x^3}\, dx$$

$$\left.\begin{array}{l} u = ln\, x \quad \to \quad du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^{-3} \quad \to \quad v = \dfrac{1}{-2}x^{-2} = \dfrac{-1}{2x^2} \end{array}\right\}$$

$$I = (ln\, x)\left(-\frac{1}{2x^2}\right) - \int \frac{-1}{2x^2}\, \frac{dx}{x} = -\frac{ln\, x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int x^{-3}\, dx = -\frac{ln\, x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + k$$

Ejercicios propuestos

3 Calcula:

$$\int x^4\, e^x\, dx$$

4 Calcula:

$$\int sen^2\, x\, dx$$

Cuadro que aparece en el Ejercicio Resuelto 3 de la Página 346.

ALGUNOS TIPOS DE INTEGRALES QUE SE RESUELVEN POR PARTES			
$\int x^n e^x \, dx$	$u = x^n$ $dv = e^x \, dx$	$\int x^n \ln x \, dx$	$u = \ln x$ $dv = x^n \, dx$
$\int x^n \operatorname{sen} x \, dx$	$u = x^n$ $dv = \operatorname{sen} x \, dx$	$\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx$	$u = \operatorname{arc\,tg} x$ $dv = dx$
$\int x^n \cos x \, dx$	$u = x^n$ $dv = \cos x \, dx$	$\int \operatorname{arc\,sen} x \, dx$	$u = \operatorname{arc\,sen} x$ $dv = dx$