Página 239

Función derivada

- • En el intervalo (a, b), $f(x)$ es decreciente. Por tanto, su derivada es negativa. Es lo que le pasa a $g(x)$ en (a, b).
  - La derivada de f en b es 0: $f'(b) = 0$. Y también es $g(b) = 0$.
  - En general:

    $g(x) = f'(x) = 0$ donde $f(x)$ tiene tangente horizontal.

    $g(x) = f'(x) > 0$ donde $f(x)$ es creciente.

    $g(x) = f'(x) < 0$ donde $f(x)$ es decreciente.
- 1) B   2) A   3) C

Página 241

1 a) $f'(3) = -2$

b) $f'(2) = 12$

c) $f'(2) = -\frac{1}{4}$

d) $f'(1) = -4$

2 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$. No existe $f'(0^+)$.

3 Para que f sea derivable en $[1, 5)$, debe serlo en el intervalo abierto $(1, 5)$ y, además, debe existir la derivada lateral $f'(1^+)$.

Página 243

4 $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) = 0 \ \rightarrow\ f(x)$ es continua en $x_0 = 3$.

Las derivadas laterales existen y coinciden. Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x_0 = 3$. Además, $f'(3) = 3$.

5 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3$. Además, $f(0) = 3$. Por tanto, $f(x)$ es continua en $x_0 = 0$.

Las derivadas laterales son finitas pero no coinciden. Por tanto, no es derivable en $x_0 = 0$.

6 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Además, $f(0) = 0$. Por tanto, $f(x)$ es continua en $x_0 = 0$.

Las derivadas laterales no existen al ser infinitos los límites. Por tanto, no es derivable en $x_0 = 0$.

7 Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, ha de ser: $n = 5$.

Para que sea derivable en $x = 0$, ha de ser $m = 0$. Por tanto, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$ para $m = 0$ y $n = 5$.

Página 247

1 a) $f'(x) = \dfrac{-2}{(1+x)^2}$ b) $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{(1-x)(1+x)^3}}$

c) $f'(x) = \dfrac{-2}{1-x^2}$ d) $f'(x) = \dfrac{-2(1+tg^2\, x)}{(1+tg\, x)^2}$

e) $f'(x) = \dfrac{-(1+tg^2\, x)}{\sqrt{(1-tg\, x)(1+tg\, x)^3}}$

f) $f'(x) = \dfrac{1+tg^2\, x}{2}$ g) $f'(x) = \dfrac{ln\, 3}{2} \cdot \sqrt{3^{x+1}}$

h) $f'(x) = \dfrac{4}{ln\, 10 \cdot tg\, 2x}$

i) $f'(x) = 2(tg\, x + tg\, x) + 2sen\, x \cdot cos\, x$

j) $f'(x) = \dfrac{cos\, \sqrt{x+1} \cdot cos\, \sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{sen\, \sqrt{x+1} \cdot sen\, \sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}$

k) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

l) $f'(x) = cos(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x}) \cdot \left(15x^4 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$

m) $f'(x) = \dfrac{cos\, x + 2x}{2\sqrt{sen\, x + x^2 + 1}}$

n) $f'(x) = \dfrac{(5-2x) \cdot sen\,(2\sqrt[3]{x+(3-x)^2})}{3\sqrt[3]{(x+(3-x)^2)^2}}$

2 a) $y' = 5x^4$; $y'' = 20x^3$; $y''' = 60x^2$

b) $y' = cos\, x - x\, sen\, x$

$y'' = -2sen\, x - x\, cos\, x$

$y''' = -3cos\, x + x\, sen\, x$

c) $f'(x) = 3sen^2\, x \cdot cos\, x - 2cos\, x \cdot sen\, x + 1$

$f''(x) = 6sen\, x \cdot cos^2\, x - 3sen^3 x + 2sen\, x$

$f'''(x) = 6cos^3\, x - 21cos\, x \cdot sen^2\, x + 8cos\, x \cdot sen\, x$

3 $f'(1) = \dfrac{13\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{60}$

4 $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 6$

5 $f'(0) = 0$

Página 249

1 a) $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ b) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

2 $(f^{-1})'(\sqrt{3}) = \dfrac{1}{4}$

Página 250

1 a) $y = 0 + \frac{6}{5}(x-3)$ b) $y = \frac{\pi}{4} + \frac{2-2\pi}{\pi+8}(x-2)$

c) Hay dos rectas tangentes:

$y = -5 + \frac{3}{4}(x-5)$ e $y = 3 - \frac{3}{4}(x-5)$

Página 251

1 a) $f'(x) = (\cos x + 1)^{x^2-1}\left[2x \ln(\cos x + 1) - \frac{(x^2-1)\,\text{sen}\, x}{\cos x + 1}\right]$

b) $g'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^3}{x^2-1}\,\text{sen}\, x}\left(\frac{3}{x} - \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2\cos x}{\text{sen}\, x}\right)$

c) $h'(x) = (\cos x)^{e^{x^2+1}} \cdot e^{x^2+1}\left[2x \ln(\cos x) - \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}\right]$

Página 257

1 a) $\Delta y = 0{,}0501$ $dy = 0{,}05$ $\Delta y - dy = 0{,}0001$

b) $\Delta y = 0{,}1145$ $dy = 0{,}1155$ $\Delta y - dy = -0{,}001$

c) $\Delta y = 0{,}01330$ $dy = 0{,}01333$ $\Delta y - dy = -0{,}00003$

2 Se emplean, aproximadamente, 12,3 cm^3 de plata.

3 5,0133

4 a) 1,04 b) 3,975 c) 4,0417

Página 258

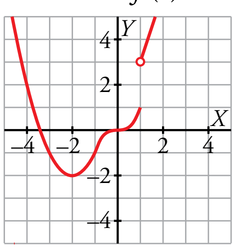
1 Hazlo tú. $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

2 Hazlo tú.

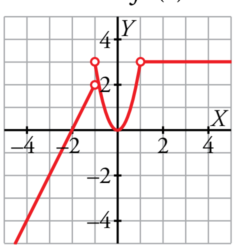
$f(x)$ está definida por funciones polinómicas en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$. Por tanto, es continua y derivable en ellos.

En $x = 1$ no lo es porque no existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ ya que los límites laterales son distintos.

Gráfica de $f(x)$:



Gráfica de $f'(x)$



Página 259

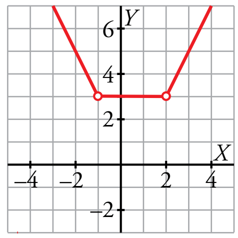
3 Hazlo tú.

La función es derivable en $\mathbb{R}$ para cualquier valor de a.

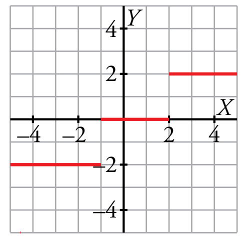
4 Hazlo tú.

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

Gráfica de $f(x)$:



Gráfica de $f'(x)$:



Página 260

5 Hazlo tú.

a) $y' = \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}$ b) $y' = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{x}$

Página 261

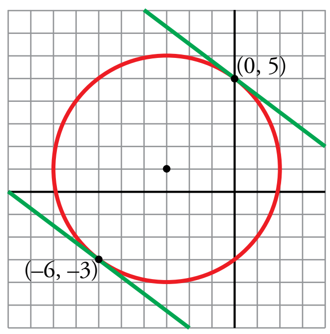
7 Hazlo tú. $(f^{-1})'(x) = \frac{e^{(e^{x/2} + x/2)}}{2}$

8 Hazlo tú. $(f^{-1})'(0) = \frac{e}{2}$

Página 262

1 $a = \frac{5}{4}$, $b = -\frac{5}{4}$

2 $x = -6$; $y = -3$ $x = 0$; $y = 5$



3 a) $y' = \frac{1}{\ln^2 x}\left(\frac{\ln x}{\text{sen}\, x \cdot \cos x} - \frac{\ln \text{tg}\, x}{x}\right)$

b) $y' = (x+1)^{\text{tg}\, x}\left[\frac{\ln(x+1)}{\cos^2 x} + \frac{\text{tg}\, x}{x+1}\right]$

c) $y' = \sqrt{x^2-1} \cdot \sqrt[4]{x+1} \cdot \frac{5x-1}{4(x^2-1)}$

Página 263

1 a) $\frac{\Delta f}{h} = 0{,}349 \quad f'(x) = 0{,}354$

b) $\frac{\Delta f}{h} = -0{,}9 \quad f'(x) = -1$

c) $\frac{\Delta f}{h} = -0{,}238 \quad f'(x) = -0{,}25$

2 a) $\frac{\Delta f}{h} = 0{,}496 \quad f'(x) = 0{,}5$

b) $\frac{\Delta f}{h} = -0{,}869 \quad f'(x) = -0{,}866$

c) $\frac{\Delta f}{h} = 4{,}07 \quad f'(x) = 4{,}0$

3 Si expresamos la diferencia entre x y x_0 usando la letra h, es decir, $h = x - x_0$, obtenemos que $x = x_0 + h$. Además, cuando $x \to x_0$, la diferencia $x - x_0 \to 0$, es decir, $h \to 0$. Sustituyendo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

4 a) $g'(a)$ b) $f'(0)$ c) $\phi'(2)$ d) $-f'(5)$

5 a) $\frac{1}{4}$ b) e^2 c) 3 d) 48

6 a) $f'(2) = \frac{2}{9}$ b) $f'(2) = \frac{1}{4}$

7 a) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ b) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

8 a) $y' = \frac{12x}{(x^2+3)^2}$ b) $y' = \frac{2}{\sqrt[3]{9x}}$

9 a) $y' = \frac{-4}{3\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^5}}$ b) $y' = -\frac{2}{x^2} + x$

10 a) $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ b) $y' = -7e^{-x}$

11 a) $y' = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$ b) $y' = \cos 2x$

12 a) $y' = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$ b) $y' = \frac{2x}{x^2+1}$

13 a) $y' = \frac{3}{9+x^2}$ b) $y' = -2 \cos(4x - 4\pi)$

14 a) $y' = \operatorname{sen} 2x$ b) $y' = \frac{1 + tg^2 x}{2\sqrt{tg\, x}}$

15 a) $y' = 2x \cos x^2$ b) $y' = \frac{2x}{x^4 + 2x^2 + 2}$

16 a) $y' = \frac{7}{\sqrt{x}}(2\sqrt{x} - 3)^6$ b) $y' = \frac{1}{2x \ln 2}$

17 a) $y' = 2x \cdot \operatorname{sen}(2x^2)$ b) $y' = -\frac{1}{x^2+1}$

18 a) $y' = -70x \cos^4(7x^2) \operatorname{sen}(7x^2)$

b) $y' = 3^x \ln 3$

19 a) $y' = \frac{10}{3\sqrt[3]{5x-3}}$ b) $y' = \frac{2x}{\sqrt{9 - x^4}}$

20 a) $y' = \frac{2}{2x-1}$ b) $y' = x + x \cdot tg^2 \frac{x^2}{2}$

21 a) $y' = \frac{2x}{x^2-1}$ b) $y' = -\frac{1}{\sqrt{2x - 4x^2}}$

22 a) $y' = \frac{-1}{2-2x}$ b) $y' = \frac{2 \operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}$

23 a) $y' = \frac{7}{(7x+2)\ln 3}$ b) $y' = -\frac{3(1 + tg^2(3/x))}{x^2\, tg(3/x)}$

24 a) $y' = 4e^{4x}$ b) $y' = -\frac{1}{x \ln(1/x)}$

25 a) $y' = 2^x \cdot \ln 2$ b) $y' = -\frac{2}{(x-1)\sqrt{-4x}}$

26 a) $y' = 90x[tg^2(3x^2+1) + tg^4(3x^2+1)]$

b) $y' = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2 + x\sqrt{x}}}$

27 a) $y' = \frac{x(1 + tg^2 x^2)}{\sqrt{tg\, x^2}}$ b) $y' = \frac{4}{3(x+2)\sqrt[3]{(x+2)(x-2)^2}}$

Página 264

28 a) $y' = \frac{-1}{1-x^2}$ b) $y' = \frac{2}{x} + 2 \cot g\, x + 2 tg\, x$

c) $y' = \frac{2x}{3(x^2-1)} - \frac{2}{x}$ d) $y' = \ln 2 + \frac{2}{tg\, x}$

29 a) $y' = \frac{-x}{y}$ b) $y' = \frac{2-x}{y-3}$ c) $y' = \frac{-9x}{16y}$

d) $y' = \frac{7(x-1)}{4(y+3)}$ e) $y' = \frac{-3x^2 - 2y}{3y^2 + 2x}$ f) $y' = \frac{2x - y^2}{2xy - 1}$

g) $y' = \frac{25x}{9y}$ h) $y' = \frac{-x-1}{y}$ i) $y' = \frac{-2x - y}{x + 2y}$

j) $y' = \frac{2x - y}{x - 1}$

30 a) $y' = x^{3x}(3ln\,x + 3)$ b) $y' = x^{x+1}\left(ln\,x + 1 + \dfrac{1}{x}\right)$

c) $y' = x^{e^x} \cdot e^x\left(ln\,x + \dfrac{1}{x}\right)$

d) $y' = (ln\,x)^{x+1} \cdot \left[ln\,(ln\,x) + \dfrac{x+1}{x\,ln\,x}\right]$

e) $y' = \left(\dfrac{sen\,x}{x}\right)^x \cdot \left[ln\left(\dfrac{sen\,x}{x}\right) + \dfrac{x\,cos\,x}{sen\,x} - 1\right]$

f) $y' = x^{tg\,x} \cdot \left[(1 + tg^2\,x)\,ln\,x + \dfrac{tg\,x}{x}\right]$

31 a) $y' = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x\left[ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}\right]$

b) $y' = (sen\,x)^x\left(ln\,sen\,x + \dfrac{x \cdot cos\,x}{sen\,x}\right)$

c) $y' = \dfrac{-4x - 2}{y - 6}$ d) $y' = \dfrac{e^x - y}{x - 1}$

e) $y' = \dfrac{y^2/2\sqrt{xy}}{1 - (\sqrt{xy}/2)}$ f) $y' = \dfrac{-2x - 3y}{3x - 2y}$

32 a) $y' = \dfrac{3 \cdot (x^2+1)^2\,(x^2-1)}{x^4}$

b) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{(1+x)\,(1-x)^3}}$

c) $y' = 3sen^2\,x \cdot cos^3\,x - 2cos\,x\,sen^4\,x$

d) $y' = \dfrac{5x^2 + 2}{3\sqrt{x^2+1}\,\sqrt[3]{x}}$

33 a) $g'(0) = 1$ b) $h'(0) = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ c) $j'(0) = \dfrac{1}{2e}$

34 a) $df(x) = (4x^3 - 4x)\,dx$

b) $df(x) = e^{2x^2+1}\,4x\,dx$

c) $df(x) = \dfrac{-2}{x}\,dx$

d) $df(x) = \dfrac{2x\,\sqrt[3]{x^2+2}}{3\,(x^2+2)}\,dx$

35 a) $\Delta y = 0{,}24$ $dy = 0{,}2$ $\Delta y - dy = 0{,}04$

b) $\Delta y = 0{,}777$ $dy = 0{,}739$ $\Delta y - dy = 0{,}038$

c) $\Delta y = 0{,}0074$ $dy = 0{,}0074$ $\Delta y - dy \approx 0$

d) $\Delta y = 0{,}049$ $dy = 0{,}05$ $\Delta y - dy = -0{,}001$

36 a) 0,24994 b) 0,12313 c) 4,000043

37 a) No es derivable en $x = -1$ ni en $x = 2$.

b) Es derivable en todo $\mathbb{R}$.

c) No es derivable en $x = 0$ ni en $x = 2$.

38 a) La función es continua y derivable, pues está formada por dos polinomios.

$f'(1) = 3$ $f'(0) = 3$ $f'(3) = 7$

b) $f(x) = \begin{cases} 3 & x < 1 \\ 2x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$

c) $f'(2) = 5$

39 Las derivadas laterales existen pero no coinciden. $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

40 a) Si $x \neq 0$ y $x \neq 3$, la función es continua y derivable.

La función no es continua en $x = 3$.

$f(x)$ no es derivable en $x = 0$ ni en $x = 3$.

b) Si $x \neq -1$ y $x \neq 2$, $f(x)$ es continua y derivable.

$f(x)$ es continua en $x = -1$.

$f(x)$ no es continua en $x = 2$.

$f(x)$ no es derivable en $x = -1$ ni en $x = 2$.

Página 265

41 a) La función es continua en $x = 0$.

La función es continua en $\mathbb{R}$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

b) La función es continua en todo $\mathbb{R}$.

La función es derivable en todo $\mathbb{R}$.

42 a) $m = 2$ y $n = -1$.

b) $f'(x)$ no se anula en ningún punto.

43 $a = 2$ y $b = -7$

44 $a = -1$ y $b = 0$

45 a) Es derivable en $x_0 = 2$ y $f'(2) = 3$.

b) Es derivable en $x_0 = 1$ y $f'(1) = 2$.

c) $\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = 1 \end{array}\right\} \to$ No es derivable en $x_0 = 0$.

d) $\left.\begin{array}{l} f'(-2^-) = -5 \\ f'(-2^+) = 5 \end{array}\right\} \to$ No es derivable en $x_0 = -2$.

$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = -5 \\ f'(3^+) = 5 \end{array}\right\} \to$ No es derivable en $x_1 = 3$.

46 a) $(f \circ g)'(x) = 18x + 6$

b) $(g \circ f)'(x) = 6x$

c) $(f \circ g')(x) = 9$

d) $(f' \circ g)(x) = 6x + 2$

47 a) $f'(x^2) = 2(x^2 + 1)$

$(f \circ g)'(x) = 4x(x^2 + 1)$

$g'[f(x)] = 2(x + 1)^2$

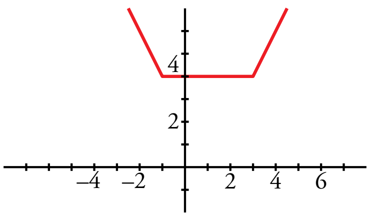
$(g \circ f)'(x) = 4(x + 1)^3$

b) $f[h(x)]' = 2[h(x) + 1] \cdot h'(x)$

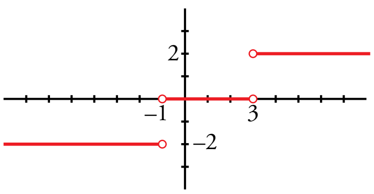
$f[x + h(x)]' = 2[x + h(x) + 1] \cdot [1 + h'(x)]$

$g[f[x + h(x)]]' = 4(x + h(x) + 1)^3 \cdot [1 + h'(x)]$

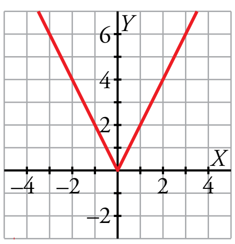
48 a) No es derivable en $x = -1$ ni en $x = 3$.

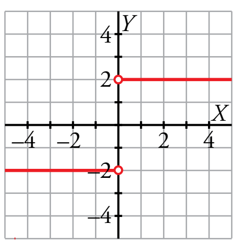


b)



49 a) $f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ b) $f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$





50 a) La función es derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$.

b) La función es derivable en $\mathbb{R} - \{-4, -2\}$.

c) La función es derivable en $\mathbb{R} - \{3\}$.

d) La función es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

51 a) Es una función continua en $\mathbb{R}$.

Es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) Es una función continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Es derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

52 $f'(x) = \begin{cases} -3x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ $f''(x) = \begin{cases} -6x & \text{si } x < 0 \\ 6x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$f'''(x) = \begin{cases} -6 & \text{si } x < 0 \\ 6 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

53 $f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$.

54 $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

55 Ha de ser $a = 1$.

56 a) $\left(3, \frac{1}{12}\right)$ b) $\left(\frac{8}{3}, \frac{-27}{16}\right)$

c) $(-1, 3)$ y $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ d) $(0, -1)$

e) $(0, 0)$ y $(-2, 4e^{-2})$

f) $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \sqrt{2}\right), \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi k, -\sqrt{2}\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$.

57 a) $x = \frac{-3}{2}$; $x = 1$

b) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

c) No tiene ningún punto de derivada nula.

d) $x = 2$

58 $x = 0{,}88$

Página 266

59 a) $f^{n)}(x) = 2^n e^{2x}$ b) $f^{n)}(x) = n!$

60 $y^{50)} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{50} sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ $y^{51)} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{51} cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

61 a) $y' = -1$; $y' = 1$ b) $y' = -1$, $y' = 1$

c) $y' = 0$ d) $y' = \frac{\pi^2}{16}\left(2 \ln \frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi}\right)$

e) $y' = -\frac{7\sqrt{130}}{234}$ f) $y' = 2$

g) y' no está definida en el punto indicado.

h) $y' = \frac{35\sqrt{11}}{66}$

62 Las derivadas de orden par son de la forma:

$f^{n)}(x) = k \cdot sen\ 2x$, por tanto, se anulan todas en $x = 0$.

63 a) 11,045 b) 37,014 c) 7,0225

d) 4,3536 e) 47,0003 f) 81,089

64 64,576 dm^3

65 De forma exacta: 60,15 dm^3

Usando diferenciales: 60 dm^3

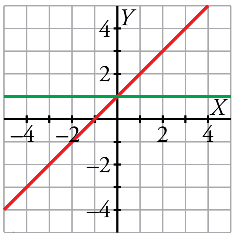
66 a) $dV = 251{,}33$ cm^3 b) $dV = 41{,}89$ cm^3

67 $$D\left[arc\ tg\ \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = \frac{1}{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} =$$

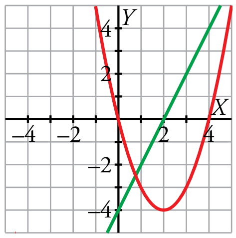
$$= \frac{e^x + e^{-x}}{\left(1 + \frac{e^{2x} - e^{-2x} - 2}{4}\right) \cdot 2} = \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot 4}{(e^{2x} + e^{-2x} + 2) \cdot 2} =$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot 2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

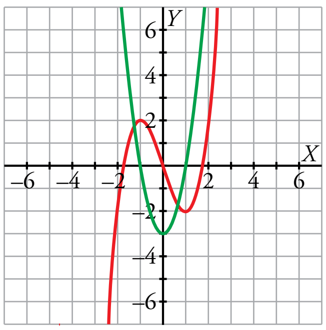
68 a)



b)



c)



69 Tiene un máximo de dos puntos de derivada nula.

Puede ser que no tenga puntos de derivada nula. También puede tener un único punto con derivada nula.

70 Si $f(x)$ es la función, entonces $f'(x) = ax + b$ con $a \neq 0$. La ecuación $f'(x) = 0$ siempre tiene solución.

71 a) $$\frac{g(x)}{x - a} = a^2 + ax + x^2 - 3a^2 \to$$

$$\to \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{x - a} = 3a^2 - 3a^2 = 0$$

b) $$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f'(a)(x - a) - f(a)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)\right) = f'(a) - f'(a) = 0$$

72 a) Verdadero. b) Verdadero. c) Verdadero.

73 Los límites laterales coinciden al ser $g(x)$ continua, luego existe $f'(0)$.

74 a) f y j b) g' c) f' d) j e) h

Página 267

75 $$\lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[h\ sen\left(\frac{1}{h}\right)\right] = 0$$

$f(x)$ es derivable en $x = 0$.

$$\lim_{h \to 0} \left[sen\left(\frac{1}{h}\right)\right]$$

No existe ya que el seno oscila

76 a) $(f \circ g)'(0) = 8$

b) $(g \circ f)'(0) = 0$

c) $(g^{-1})'(4) = 1$

d) $(f^{-1})'(5) = \frac{1}{4}$

77 a) $$cosh^2\ x - senh^2\ x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1$$

b) $senh\ x \cdot cosh\ y + cosh\ x \cdot senh\ y =$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} = senh\,(x + y)$$

c) $cosh\ x \cdot cosh\ y + senh\ x \cdot senh\ y =$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} = cosh\,(x + y)$$

d) $$senh'\ x = D\left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = cosh\ x$$

e) $$cosh'\ x = D\left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right] = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = senh\ x$$

f) $$tgh'\ x = D\left[\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right] = \frac{1}{cosh^2\ x}$$

78 a) $$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 - x}}$$

b) $$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = -1$$

c) $$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}}} = -1$$

79 $$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = 0$$

Existe la derivada y $f'(1^-) = 0$.

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(-1 + h) - f(1)}{h} = +\infty \to \text{No existe } f'(-1^+).$$

80 a) $f(x)$ tiene una raíz doble $\rightarrow f(x) = (x-a)^2 g(x)$.

$f'(x) = 2(x-a)\,g(x) + (x-a)^2\,g'(x)$

$f'(a) = (a-a)\,[2g(a) + (a-a)g'(a)] = 0$

b) $x = a$ es raíz de $f'(x)$. Entonces $f'(x) = (x-a)h(x)$.

Si $x = a$ es raíz de $f(x) \rightarrow f(x) = (x-a)j(x)$

Derivando: $f'(x) = j(x) + (x-a)\,j'(x)$

$(x-a)\,h(x) = j(x) + (x-a)\,j'(x) \rightarrow$

$\rightarrow j(x) = (x-a)[h(x) - j'(x)]$

Sustituyendo $j(x)$: $f(x) = (x-a)^2\,[h(x) - j'(x)]$

81 a) $y^{n)} = a^n e^{ax}$

b) $y^{n)} = \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$

c) $y^{n)} = \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(1+x)^n}$

82 $y = \dfrac{x}{2} \rightarrow y' = \dfrac{1}{2}$

Autoevaluación

1 a) $y' = \dfrac{3x-1}{\sqrt{x-1}}$

b) $y' = \dfrac{-3}{x^2+9}$

c) $y' = 2 \cdot \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

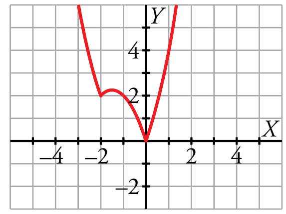
d) $y' = \dfrac{\ln 2}{3} \cdot 2^{(x-1)/3}$

e) $y' = -(tg\ x)^{1-x}\ \ln(tg\ x) + (1-x)\,(1+tg^2\ x)\,(tg\ x)^{-x}$

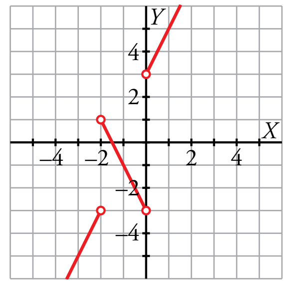
f) $y' = \dfrac{y-2x}{2y-x}$

2 $f'(x) = \dfrac{-2}{x^3}$

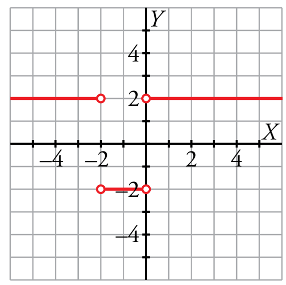
3 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < -2 \\ -x^2 - 3x & \text{si } -2 \le x < 0 \\ x^2 + 3x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$



$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < -2 \\ -2x - 3 & \text{si } -2 < x < 0 \\ 2x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

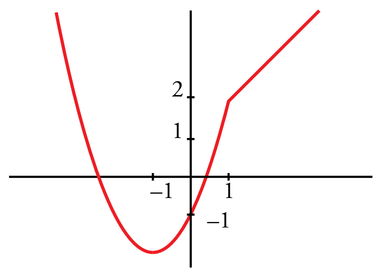


$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -2 & \text{si } -2 < x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$



4 La función es continua en todo $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

La derivada se anula en $x = -1$.



5 $f(x)$ será continua si $a = 2$ y $b = 2$. Es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

6 f es derivable en $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

$f'(-4) = 0 \qquad f'(0) = 0 \qquad f'(3) = -1$