

4 Vectores en el espacio

Página 123

Diagonal de un ortoedro y volumen de un paralelepípedo

- 1 Diagonal = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- 2 Volumen = $a b c \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$

Página 126

- 1 a) Producto de números por vectores:

$$b \cdot \vec{v}; (a \cdot b) \cdot \vec{v}; a \cdot (b \cdot \vec{v})$$

Producto entre números: $a \cdot b$

$$b) \left. \begin{array}{l} a \cdot (b \cdot \vec{v}) = 3 \cdot (-2\vec{v}) \\ (a \cdot b) \cdot \vec{v} = -6\vec{v} \end{array} \right\} 3 \cdot (-2\vec{v}) = -6\vec{v}$$

- 2 a) Suma de números: $a + b$

Suma de vectores: $a\vec{v} + b\vec{v}$

$$b) \left. \begin{array}{l} (a + b) \cdot \vec{v} = 8\vec{v} \\ a\vec{v} + b\vec{v} = 3\vec{v} + 5\vec{v} \end{array} \right\} 8\vec{v} = 3\vec{v} + 5\vec{v}$$

Página 128

- 1 a) $(-6, 10, 2)$ b) $(0, 0, 0)$
 c) $(3, -5, -1)$ d) $(1, 14, 0)$
 e) $(-10, 1, 3)$ f) $(-36, 13, 11)$

- 2 $a = 6, b = 2, c = 4$, es decir, $6\vec{x} - 2\vec{y} + 4\vec{z} = \vec{w}$.

Página 131

- 1 a) 60 b) $k = -\frac{25}{7}$

Página 133

- 2 a) -11
 b) $|\vec{u}| = 5,48; |\vec{v}| = 3$
 c) $132^\circ 1' 26''$
 d) Segmento proyección de \vec{u} sobre $\vec{v} = -3,67$
 Vector proyección de \vec{u} sobre $\vec{v} = (-1, 2, -2)$
 Segmento proyección de \vec{v} sobre $\vec{u} = -2,008$
 Vector proyección de \vec{v} sobre $\vec{u} = (5, -1, 2)$
 e) $x = \frac{-33}{2}$

- 3 Por ejemplo: $(0, -7, 2); (-7, 0, 3); (-2, 3, 0)$.

- 4 El vector buscado puede ser $(-2, 8, 9)$ o cualquier otro paralelo a él.

Página 136

- 1 $(-8, -18, -25)$
- 2 $(-8, -18, -25)$ o cualquier vector proporcional a él.
- 3 $15,91 u^2$

Página 137

- 1 $53 u^3$
- 2 $x = 0$

Página 138

1 Hazlo tú.

$$a) \vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{v} + 0\vec{w}.$$

- $-2\vec{u} = \vec{v}$, luego no pueden ser linealmente independientes los tres vectores.

2 Hazlo tú.

- No son ortogonales.

$$b) \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}} \right)$$

Página 139

3 Hazlo tú.

- $m = 1$
- Ningún par de los vectores dados son perpendiculares.

4 Hazlo tú.

$$|\vec{u}| = 4$$

$$|\vec{v}| = 6$$

$$\text{Vector proyección} = \left(\frac{16}{9} - \frac{4}{9}\sqrt{3}, \frac{2}{9}\sqrt{3} - \frac{8}{9}, \frac{4}{9}\sqrt{3} - \frac{16}{9} \right)$$

5 Hazlo tú.

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{100 + 48\sqrt{2}}$$

Página 140

$$1 |\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3| = \sqrt{25} = 5$$

- 2 $m = 2, m = -2$

$$3 a) \vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}a^2$$

Lo mismo ocurre con todos los productos.

$$\begin{aligned} \text{b) } \vec{CD} &= \vec{AD} - \vec{AC} \\ \vec{AB} \cdot \vec{CD} &= \vec{AB} \cdot (\vec{AD} - \vec{AC}) = \\ &= \vec{AB} \cdot \vec{AD} - \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 = 0 \end{aligned}$$

Luego $\vec{AB} \perp \vec{CD}$.

$$4 \text{ a) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow \text{Los vectores son L.I.}$$

$$\text{b) } \vec{d} \left(7, -\frac{13}{5}, \frac{14}{5} \right)$$

$$5 \text{ a) } (1, 1, 0) \quad \text{b) } \sqrt{2} \text{ u} \quad \text{c) } 2 \text{ u}^2$$

Página 141

1 a) Hay dos vectores linealmente independientes.

$$\text{b) } \vec{w} = \vec{u} + 2\vec{v}$$

c) No se puede.

$$\text{d) } m = -15$$

$$2 \vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} \rightarrow (3, -1, 0) = a(1, 2, -1) + b(2, -3, 5)$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $|A'| = 28 \neq 0$, el sistema es *incompatible*.

$\text{ran}(A') = 3$, los tres vectores son linealmente independientes.

$$3 \vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{c}; \quad \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{c}; \quad \vec{c} = \frac{-1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

4 a) Si $m = -2$, los vectores son linealmente dependientes.

b) Si $n = \frac{-5}{8}$, los vectores son linealmente dependientes.

5 A no es una base.

B no es una base.

C es una base de \mathbb{R}^3 .

6 S es una base cuando $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

$$7 \text{ a) } 0 \quad \text{b) } |\vec{a}| = 3; |\vec{b}| \approx 7,07 \quad \text{c) } 90^\circ$$

$$\text{d) } -41 \quad \text{e) } (-16, -5, 13) \quad \text{f) } 15\sqrt{2}$$

$$\text{g) } 0 \quad \text{h) } \vec{0} \text{ (vector cero).}$$

$$8 \text{ a) } m = -2 \quad \text{b) } m = \frac{2}{5}$$

$$9 (1, -1, 2)$$

10 $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0 \rightarrow$ no son ortogonales.

$$\alpha = 84^\circ 53' 20''$$

$$11 m = \frac{5}{3}$$

$$12 \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right). \text{ También podría ser } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right).$$

$$13 \vec{u} \times \vec{v} = (-5, -5, 5); \quad \vec{u} \times \vec{v} = (5, 5, -5) = -\vec{u} \times \vec{v}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| \approx 8,66$$

$$14 33,66 \text{ u}^2$$

$$15 \left(\frac{-3}{\sqrt{91}}, \frac{-1}{\sqrt{91}}, \frac{9}{\sqrt{91}} \right)$$

$$16 (-2, -2, 4)$$

17 a) 15 \rightarrow El paralelepípedo tiene un volumen de 15 u^3 .

b) -15 \rightarrow El paralelepípedo tiene un volumen de 15 u^3 .

c) 0 \rightarrow Los tres vectores no forman un paralelepípedo (los vectores son coplanarios).

$$18 70 \text{ u}^3$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = |(\vec{u} \times \vec{v})|^2$$

$$19 18,5 \text{ u}^3$$

$$20 m = -4$$

Página 142

$$21 \text{ a) } m = 1 \quad \text{b) } m \neq -4 \quad \text{c) } \vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

$$22 \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ para cualquier valor de } a, b, c.$$

$$23 (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (2, 5, -1) \cdot (3, -1, 1) = 0.$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (0, -1, -1) \cdot (3, -1, 1) = 0.$$

24 a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Luego \vec{u} y \vec{v} son perpendiculares, y el paralelogramo es un rectángulo.

$$\text{b) } \text{Área} \approx 29,22 \text{ u}^2$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| \approx 29,22 \text{ u}^2$$

$$25 \text{ a) } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

$$\text{b) } (-\sqrt{6}, \sqrt{6}, -2\sqrt{6}) \text{ y } (\sqrt{6}, -\sqrt{6}, 2\sqrt{6})$$

26 $(2, -1, 1)$

27 $a = b$

28 $\vec{u}\left(\frac{5}{2}, 1, \frac{-3}{2}\right)$

29 a) Para $a = 1$ y para $a = -2$, los tres vectores dados son linealmente dependientes.

b) Para $a = 1$: $-1 \cdot (-2, 1, 1) - 1 \cdot (1, -2, 1) = (1, 1, -2)$

Para $a = -2$:

$1 \cdot (-2, -2, -2) + 0 \cdot (-2, -2, -2) = (-2, -2, -2)$

30 a) $a = 0, a = 1$

b) Para $a = 2$, los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} son linealmente independientes. Así, cualquier otro vector, y, en particular $\vec{c}(1, 2, 3)$, depende linealmente de ellos.

c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ para $a = 1$. Está probado en el apartado a).

31 a) $k = 0$ b) $k = 1$ c) $k = \frac{1}{9}$

32 a) Hay tres vectores linealmente independientes en S .

b) $\vec{u} = k \cdot (1, 1, 1) + 0 \cdot (0, 2, 1)$

c) $\vec{v}(1, 1, -1)$

33 Hay dos soluciones: $(\sqrt{5}, -2\sqrt{5}, 3\sqrt{5})$ y $(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, -3\sqrt{5})$.

34 $(-3\lambda, 2\lambda, \lambda)$ ($\lambda \neq 0$)

35 $|\vec{a} + \vec{b}| = 2\sqrt{7}$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 2\sqrt{3}$

36 $|\vec{u} + \vec{v}| \approx 11,66$; $|\vec{u} - \vec{v}| \approx 11,66$

37 $61^\circ 26' 21''$

38 -45

39 No. Por ejemplo, si $\vec{u}(3, -2, 0)$, $\vec{v}(5, 1, 0)$ y $\vec{w}(7, 4, 0)$, tenemos que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, sin embargo, $\vec{v} \neq \vec{w}$.

40 $\vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m\vec{a} \cdot \vec{b} + n\vec{a} \cdot \vec{c} = m \cdot 0 + n \cdot 0 = 0$. Por tanto, $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$.

41 a) No existen dos vectores que cumplan estas condiciones.

b) \vec{u} y \vec{v} tienen la misma dirección.

Página 143

42 a) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (-7, 1, 3)$

$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = (-7, 1, 3)$

b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (8, -9, 16)$

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (11, 1, -3)$

43 No. Por ejemplo, $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(2, 4, 6)$ y $\vec{c}(3, 6, 9)$.

44 $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}] = 1 \neq 0$. Son L.I.

$[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}] = -1 \neq 0$. Son L.I.

$[\vec{a} - \vec{c}, \vec{c} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{a}] = 0$. Son L.D.

45 a) Tiene infinitas soluciones, luego es verdadero.

Los vectores son de la forma: $\lambda(19, -21, -10)$.

b) $|\vec{a} + \vec{b}| = 7 \rightarrow$ es falso.

c) Falso, como se ve en el ejercicio 42 b) de esta sección.

d) Verdadero.

Ejemplo: $\vec{a}(1, 0, 0) \rightarrow |\vec{a}| = 1$; $\frac{3}{1}\vec{a} = (3, 0, 0)$

e) Falso, $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v}$

f) Verdadero.

Ejemplo: $a(1, 0, 0)$; $b(0, 1, 0) \rightarrow$

$\rightarrow 2a - 3b = (2, -3, 0) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

g) Verdadero, puesto que si $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \rightarrow -1 = \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) \rightarrow \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 180^\circ$, tienen la misma dirección y sentidos opuestos.

h) Falso, como se ha visto en el ejercicio 43 de esta sección.

46 a) $\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{BC}$; y, como AH_A es la altura correspondiente al lado BC , entonces:

$\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AH_A} \rightarrow \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{HA} \rightarrow \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow \overrightarrow{HA} \cdot (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}) = 0$

Análogamente, como $\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AC}$, tenemos que: $\overrightarrow{HB} \cdot (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}) = 0$

b) $\overrightarrow{HC} \cdot (\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA}) = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA} =$
 $= \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} =$
 $= \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} =$
 $= \overrightarrow{HB} \cdot (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}) = 0$

Por consiguiente, si $\overrightarrow{HC} \cdot (\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA}) = 0$, dado que $\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AB}$, entonces $\overrightarrow{HC} \perp \overrightarrow{AB}$; luego H también pertenece a la altura correspondiente al vértice C . Así, las tres alturas se cortan en el mismo punto, H .

47 $a = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

Autoevaluación

1 a) $a = 0, b = 0, c = 0$

b) Sí, porque son tres vectores y son linealmente independientes.

c) $\vec{r} = -\frac{1}{5}(1, -1, 0) + \frac{4}{5}(0, 1, 2) - \frac{3}{5}(-2, 0, 1)$

2 $|\vec{u}| = 4$

$|\vec{v}| = 6$

$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 67^\circ 47' 26''$

Vector proyección de \vec{u} sobre \vec{v} : $\frac{4 - \sqrt{3}}{9}(4, -2, -4)$

3 a) $m = 0$ b) $\vec{w} = (-28, -21, 0)$

c) $\vec{u}' = \frac{1}{5}(3, -4, 0); \vec{v}' = \frac{1}{7}(0, 0, 7); \vec{w}' = \frac{1}{35}(-28, -21, 0)$

d) Por ser perpendiculares entre sí y, además, unitarios, la base $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$ es ortonormal.

4 a) $b \neq 6; a = \frac{-3}{6-b}$ b) $b = \frac{11}{3}$

5 $m = -\frac{24}{5}, m = 0$

6 $\left(\sqrt{\frac{15}{2}}, 3\sqrt{\frac{15}{2}}, 5\right)$ y $\left(-\sqrt{\frac{15}{2}}, -3\sqrt{\frac{15}{2}}, 5\right)$

7 $m = 3, m = -2$