

GEOMETRIA EN EL PLANO.

Tipos de rectas. Vector director. Pendiente. Paralelas y perpendiculares

1.- Encuentra la ecuación vectorial, paramétrica y continua de la recta que pasa por los puntos $A=(3,2)$ y $B=(1,-1)$.

Sol: $(x,y)=(3,2)+t(2,3)$; $\{x=3+2t; y=2+3t\}$; $(x-3)/2=(y-2)/3$

2.- ¿Cuál es la ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $P=(2,1)$ y $Q=(1,-2)$. ¿Para qué valores del parámetro se obtienen los puntos P y Q y el punto medio de P y Q?

Sol: $\{x=2+t; y=1+3t\}$; $t=0$; $t=-1$; $t=-1/2$

3.- a) ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A=(2,2)$ y $B=(0,4)$? b) Escribe las ecuaciones explícita e implícita de la recta que pasa por los puntos $P=(1,4)$ y $Q=(2,3)$.

Sol: a) $m=-1$; b) $y=-x+5$; $x+y-5=0$.

4.- Deduce la ecuación de la recta cuyos puntos de intersección con los ejes son $A=(6,0)$ y $B=(0,-2)$.

Sol: $x-3y-6=0$.

5.- Escribe las ecuaciones generales de los ejes coordenados. ¿Cuál es la ecuación paramétrica de cada uno?. Sol: $y=0$, $x=0$; $\{x=\lambda, y=0\}$; $\{x=0, y=\lambda\}$

6.- Escribe la ecuación explícita de la bisectriz del primer y tercer cuadrante. Escribe también la de la bisectriz del segundo y el cuarto cuadrante. Sol: $y=x$; $y=-x$.

7.- Escribe en formas explícita y continua la ecuación de la recta: $2x+3y=6$.

Sol: $y=(-2/3)x+2$; $(x-3)/3 = y/-2$.

8.- Calcula la ecuación de la recta perpendicular a r que pasa por el punto P en los casos: a) r: $\{x=2-3t; y=1+t\}$; $P=(3,1)$; b) r: $(x-1)/2=y/3$, $P=(0,5)$; c) r: $y=2x-1$, $P=(1,2)$; d) r: $2x-3y+2=0$, $P=(0,0)$.

Sol: a) $(x-3)/1=(y-1)/3$; b) $x/-3=(y-5)/2$; c) $(x-1)/-2=(y-2)/1$; d) $x/2=y/-3$.

9.- Halla la ecuación de s que es perpendicular a r: $x+y-1=0$ y pasa por el punto $A=(2,1)$. Busca las coordenadas de un punto S que equidiste de A y de r. Sol: $x-y-1=0$

10.- ¿Pertenece el punto $P=(3,3)$ a la recta que pasa por los puntos $A=(1,-1)$ y $B=(2,1)$? Sol: Sí

11.- En un espacio tridimensional, ¿cuáles son las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $A=(0,1,0)$ y $B=(3,1,1)$?

Sol: $\{x=0+3t; y=1; z=0+t\}$

12.- Dada la recta r: $x+3y+2=0$, en forma implícita, escribirla en forma explícita, canónica, normal, continua y vectorial.

Sol: a) $y=(-1/3)x-2/3$; b) $(x/-2)+y/(-2/3)=1$; c) $(x+3y+2)/10=0$; d) $(x-1)/3=(y+1)/-1$; e) $(x,y)=(1,-1)+t(3,-1)$.

13.- Escribir en la forma normal las rectas r: $4x+3y-10=0$ y r': $3x-y+4=0$.

Sol: a) $(4/5)x+(3/5)y-2=0$; b) $(3/2)x-(1/2)y+2=0$.

14.- Hallar la ecuación del haz de rectas definido por las rectas r: $x+y-1=0$ y s: $3x+y+4=0$. Hallar después la recta del haz que: a) Pasa por el punto $A(1,2)$. b) Es paralela a la recta s: $x-y-2=0$. c) Es perpendicular a la recta r: $x-2y+1=0$.

Sol: $\alpha(x+y-1)+\beta(3x+y+4)=0$; a) $3x+7y=17$; b) $x-y+6=0$; c) $4x+2y+3=0$.

15.- ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(0,1)$ y $B(3,4)$? Sol: $m=1$

16.- ¿Cuál es el vector de dirección y la pendiente de las siguientes rectas?:

a) $y=3x-2$. b) $(x-1)/2=(y+2)/4$.

Sol: a) $v=(1,3)$; $m=3$; b) $v=(2,4)$; $m=2$

17.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por $B(3,1)$ y es paralela a la que pasa por los puntos $A(2,0)$ y $C(2,-1)$. Sol: $y=1$

18.- a) ¿Cómo sería la ecuación de una recta cualquiera que pasase por el punto $(2,-1)$? b) ¿Cuál de todas estas pasarían por el punto $(0,3)$? c) ¿Cuál de ellas sería paralela a la recta $x+2y=5$?

Sol: a) $(x-2)/v_1=(y+1)/v_2$; b) $(x-2)/2=(y+1)/-4$; c) $(x-2)/-2=(y+1)/1$

19.- Escribe en forma explícita e implícita la ecuación de la recta $2x+y=2$. Sol: $y=-2x+2$; $2x+y-2=0$

20.- Hallar la ecuación de la recta perpendicular a la recta $x+y-1=0$ que pasa por el punto $A(2,1)$.

Sol: $x-y-1=0$

21.- a) Hallar el haz de rectas que pasa por el punto $A(3,-1)$ en forma explícita; b) ¿Cuál de las rectas del haz es paralela a la recta $3x-y=2$? c) ¿Cuál de las rectas del haz pasa por el punto medio del segmento de extremos $A(4,-1)$, $B(0,-5)$. Sol: a) $y=m(x-3)-1$; b) $y=3(x-3)-1$; c) $y=2(x-3)-1$

22.- Halla la ecuación de la perpendicular a la recta $x+y-1=0$ por el punto de abscisa 3.

Sol: $(3,-2)$; $x-y-5=0$

23.- Halla la ecuación de la recta perpendicular al vector $w(2,1)$ y que corta a $y=x-2$ en el punto de ordenada 3. Sol: $2x+y-13=0$

24.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x+3y+1=0$ y $x-y-2=0$, y es perpendicular a la recta $(x/5)+(y/3)=1$. Sol: Pto corte: $(1,-1)$; $5x-3y+5=0$

25.- Dadas las rectas $r: \{x=1+\lambda; y=2\lambda\}$ y $s: (x+1)/3=(y-1)/1$. a) Determinar el punto de intersección de ambas y las ecuaciones de las rectas que pasando por dicho punto sean: b) paralela a $y=x-3$; c) perpendicular a $x+y+5=0$. Sol: a) $(2,2)$; b) $y=x$; c) $x-y=0$

26.- Si te dicen que el punto $(3,k)$ pertenece a la recta $y = x+6$. ¿Cuánto vale k ? Sol: $k=9$

27.-Escribe la ecuación paramétrica y continua de la recta: $x+2y=4$.

Sol: $\{x=-2t; y=2+t\}$; b) $x/-2=(y-2)/1$

28.- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2,-1)$ que es paralela a la que pasa por los puntos $(2,0)$ y $(1,3)$. Sol: $3x+y-5=0$

29.- Dadas las rectas siguientes, decide cuales son paralelas y cuales no: a) $\{x=2+t; y=-1+2t\}$, $\{x=3+t; y=2t\}$, $\{x=t; y=t\}$; b) $x+y+1=0$; $2x-y+2=0$; c) $3x-y+1=0$; $3x-y=0$.

Sol: a) paralelas las dos primeras; b) no son c) son paralelas

30.- ¿Cuál o cuáles de las siguientes rectas pasan por el punto $(1,3)$? a) $x-2y+2=0$; b) $2x+y-5=0$;

c) $y=2x-3$. Sol: a) no; b) si; c) no

31.- Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2,1)$ y por el punto de intersección entre las rectas: $r: y=2x+2$; $s: (x-1)/1=(y-3)/1$. Sol: $x+2y-4=0$

32.- ¿Pertenece el punto $(0,5)$ a la recta determinada por el vector $(1,3)$ y el punto $(2,3)$? Sol: no

33.- Halla la ecuación de la recta perpendicular a la $3x-4y+1=0$ que pasa por el punto $(1,0)$.

Sol: $4x+3y-4=0$

Segmentos. Pto Medio. Ptos de corte. Punto simétrico.

- 1.- Busca un punto P situado en el segmento AB, $A=(1,2)$ y $B=(4,-1)$ que lo divida en dos partes una doble de la otra. Sol: $P=(2,1)$; $P'=(3,0)$
- 2.- Halla los puntos de corte con los ejes coordenados de la recta: $(x+2)/2=(y-2)/2$. Sol: $(0,4)$ y $(-4,0)$.
- 3.- Encuentra las coordenadas de un punto de $2x-y-6=0$, que diste 2 unidades de $3x-4y+1=0$.
Sol: $(3,0)$, $(7,8)$
- 4.- Encuentra las coordenadas del punto simétrico de $P=(2,-1)$ respecto a la recta $r: 2x+y-3=0$. Sol: $(0,3)$.
- 5.- Busca un punto P sobre la recta $-3x+4y+1=0$, tal que la recta que contiene a PO (O=origen de coordenadas) pase por el punto medio del segmento AB, siendo $A=(2,1)$ y $B=(1,1)$. Sol: $(3,2)$
- 6.- Las coordenadas del punto medio del segmento AB son $(2,1)$. Calcula las coordenadas del punto A sabiendo que las coordenadas de B son $(1,2)$. Sol: $(3,0)$
- 7.- Dados los puntos $A(3,6)$ y $B(1,0)$ y la recta $r: x-y+1=0$, hallar: a) El simétrico de A respecto a B. b) El simétrico de B respecto a r. c) La ecuación de la recta s, simétrica a la AB respecto de r.
Sol: a) $(-1,-6)$; b) $(-1,2)$; c) $x-3y+7=0$.
- 8.- Hallar: a) Las coordenadas del punto P' simétrico del $P(2,1)$, respecto del $M(2,0)$. b) Las coordenadas del punto A', simétrico de $A(-2,1)$ respecto de la recta $t: 2x+y-2=0$. c) La ecuación de la recta r', simétrica de la $r: x+2y-3=0$ respecto de la $s: x+y=4$.
Sol: a) $(2,-1)$; b) $(0,2)$; c) $4x+3y=21$
- 9.- Sabiendo que $A(2,4)$ y $C(6,0)$. Hallar las coordenadas del punto B del modo que $CA = (1/4)CB$.
Sol: $(3,3)$
- 10.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de la recta $x-2y+2=0$ con el eje X y es paralela a la recta que pasa por el punto $(2,-1)$ y por el punto medio del segmento de extremos $(0,4)$ y $(2,-2)$. Sol: $2x+y+4=0$
- 11.- Hallar las coordenadas del punto simétrico de $P(-1,-1)$ respecto de la recta $x+3y-6=0$. Sol: $(1,5)$
- 12.- Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos $A(1,2)$ y $B(3,4)$ y el ángulo que forma con el eje X. Sol: $x+y-5=0$
- 13.- Hallar las ecuaciones de las rectas paralela y perpendicular a la $2x-y+1=0$, por el punto $P(3,2)$. Ambas rectas cortan a los ejes OX y OY respectivamente en los puntos A y B. Calcúlese la mediatriz de AB. Sol: a) $2x-y-4=0$; $x+2y-7=0$
- 14.- Ecuación de la mediatriz del segmento que determina la recta $2x+y=4$ al cortar a los ejes de coordenadas. Sol: $x-2y+3=0$
- 15.- Si la recta r corta a $y=2x$ ¿corta a las rectas $2y+m=4x$? Razona la respuesta. Sol: Sí, son paralelas
- 16.- Halla el simétrico del punto $(1,2)$ respecto a la recta $x-2=0$. Sol: $(3,2)$
- 17.- Dado el segmento de extremos $A(3,10)$ y $B(5,2)$. Halla un punto P de este segmento de manera que la distancia PA sea tres veces PB. Sol: $(9/2,4)$

Mediatrices y distancias

- 1.- Halla la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos $A=(3,4)$ y $B=(1,2)$. Sol: $(x-2)/1=(y-3)/-1$.
- 2.- Calcula la distancia del punto $P=(1,-1)$ a cada una de las rectas siguientes: a) $x+3y+2=0$; b) $y=2x-1$; c) $(x+1)/2=(y-2)/3$; d) $\{x=1+t; y=2-4t\}$; e) $4x+3y=2$; f) $x/2+y/3=1$.
Sol: a) 0; b) 2/5; c) 12/13; d) 3/17; e) 1/5; f) 5/13.
- 3.- Calcula la distancia entre las rectas paralelas: r: $3x+4y-15=0$ y s: $3x+4y=40$. Sol: 5
- 4.- Calcula la distancia entre las rectas paralelas: a) r: $x+y-2=0$; s: $x+y+1=0$; b) r: $y=x-3$; s: $x-y+2=0$.
Sol: a) 3/2; b) $5/\sqrt{2}$
- 5.- Calcula las longitudes de las tres alturas del triángulo determinado por los puntos $A=(1,1)$, $B=(1,3)$ y $C=(3,2)$. Sol: $4/\sqrt{5}$, $4/\sqrt{5}$, 2
- 6.- Un punto P que es equidistante de $A=(3,1)$ y de $B=(3,5)$, dista el triple del eje de abscisas que del eje de ordenadas. ¿Cuáles son sus coordenadas?. Sol: (1,3)
- 7.- Dados los puntos $A(1,-4)$ y $B(-2,3)$ y la recta r: $x-2y-1=0$, hallar un punto P que equidiste de A y B y sea incidente con r.
Sol: (3,1)
- 8.- Hallar la distancia entre las rectas r: $12x-5y+2=0$ y s: $12x-5y+5=0$.
Sol: 3/13
- 9.- Hallar un punto de la recta r: $x+y-2=0$ que equidiste de los puntos $A(1,3)$ y $B(1,1)$. Sol: (0,2)
- 10.- Calcular la distancia del punto $P(2,1)$ a cada una de las rectas siguientes: a) $x-y+5=0$; b) $x/2=(y-2)/1$; c) $\{x=1+2t; y=-2t\}$; d) $x/2+y/3=1$.
Sol: a) $6/\sqrt{2}$; b) $4/\sqrt{5}$; c) $\sqrt{2}$; d) $2/\sqrt{13}$
- 11.- Un punto P que es equidistante de $A(2,1)$ y $B(2,3)$ dista el doble del eje de abscisas que del eje de ordenadas. ¿Cuáles son sus coordenadas?. Sol: (1,2)
- 12.- Dada la ecuación $x-y+2=0$. Hallar la ecuación de una paralela a dicha recta a una distancia de 2 unidades. Sol: $x-y=0$
- 13.- Hallar la distancia entre las rectas paralelas: a) $x+y-3=0$; $2x+2y+1=0$.
b) $(x-1)/4=(y+1)/3$; $\{x=4t; y=1+3t\}$.
Sol: a) 7/8; b) 13/5
- 14.- Hallar las coordenadas de un punto de la recta $x-y-1=0$ que diste 1 unidad de la recta $3x-4y+2=0$.
Sol: (1,0)
- 15.- Hallar las coordenadas de un punto P equidistante de 3 puntos dados: $A(4,4)$, $B(5,3)$ y $C(-1,3)$.
Sol: P(2,1)
- 16.- Hallar las ecuaciones de las rectas que son incidentes con el punto $A(2,3)$ y distan 2 unidades del origen de coordenadas. Sol: $5x-12y+26=0$

Problemas con ángulos y bisectrices.

1.- Hallar la ecuación de la recta r que pasa por el punto $(2,1)$ y forma con la recta $y=2x-1$ un ángulo de 45° . Sol: $x-3y+1=0$

2.- Calcula el ángulo que forman las rectas r y s en los siguientes casos:

- a) $r: (x,y)=(1,3)+t(1,-3)$; $s: \{x=2+7t; y=3t\}$;
- b) $r: y=3x-2$; $s: 2x-5y+3=0$;
- c) $r: 3x-2y+1=0$; $s: 2x-5y+3=0$;
- d) $r: 2x+y-3=0$; $s: (x+1)/7=(y-1)/4$;
- e) $r: x/1=(y+3)/2$; $s: (x-2)/-1=(x+1)/5$;
- f) $r: y=4x-2$; $s: 5x+3y=0$;

Sol: a) 85° ; b) $49'76^\circ$; c) $34,5^\circ$; d) $86'8^\circ$; e) $37'87^\circ$; f) 45°

3.- Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $A=(1,-3)$ y forma un ángulo de 45° con la recta $3x+y+2=0$.

Sol: $y+3=2(x-1)$.

4.- Escribe las ecuaciones de las bisectrices de $r: 3x-4y=0$ y $s: 8x+6y+3=0$.

Sol: $2x+14y+3=0$; $14x-2y+3=0$.

5.- Determina la ecuación de la recta r que pasa por el punto $A=(1,1)$ y forma con la recta $y=3x-2$ un ángulo de: a) 45° ; b) 60° ; c) 90° ; d) 30° .

Sol: a) $x-2y+1=0$; b) $y-1 = \frac{5\sqrt{3}-6}{13}(x-1)$; c) $x+3y-4=0$; d) $y-1 = \frac{5\sqrt{3}-6}{3}(x-1)$

6.- Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto de intersección de las rectas $y=x+2$ y $3x+y=2$ formando un ángulo de 45° con la segunda de ellas. Sol: $y=2x+2$; $x+2y-4=0$

7.- Las rectas $2x+3y-3=0$ y $ax+y-5=0$ forman un ángulo de $\pi/6$ radianes. ¿Cuánto vale a ?

Sol: $a = \frac{3+2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-2}$

8.- Dadas las rectas $r: 3x+2y-2=0$ y $s: 2x-3y+1=0$, hallar: a) El ángulo que forman. b) Las ecuaciones de las bisectrices.

Sol: a) 90° ; b) $x+5y-3=0$; $5x-y-1=0$.

9.- Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $A(2,-1)$ y forman un ángulo de 45° con la recta $r: 2x+y-2=0$.

Sol: $3x-y-7=0$; $x+3y+1=0$

10.- Hallar las ecuaciones de las rectas que pasando por el punto $A(0,2)$ forman ángulos iguales con las rectas $r: x+2y-3=0$ y $s: 2x+y+2=0$.

Sol: $x+y-2=0$; $x-y+2=0$

11.- Escribir en la forma normal las rectas $r: 3x+4y-5=0$ y $r': 3x-4y+15=0$. Calcular después el valor del ángulo que forman.

Sol: $3/5 x + 4/5 y - 1 = 0$; $3/5 x - 4/5 y + 3 = 0$; 90°

12.- Hallar la ecuación de la recta que es incidente con el punto $P(1,3)$ y forma un ángulo de 30° con la $r: 2x+y-1=0$.

Sol: $y-3=(5\sqrt{3}+8)(x-1)$

13.- Hallar las ecuaciones de las rectas que son incidentes con el punto $A(2,-1)$ y forman ángulos iguales con las rectas $r: 3x+4y-2=0$ y $s: 4x+3y=0$. Sol: $x-y-3=0$; $x+y-1=0$

14.- Hallar las ecuaciones de las rectas que forman ángulos iguales con las rectas $r: x+y-2=0$ y $s: 2x-2y=0$, y cuya ordenada en el origen es 3. Sol: $y-3=0$; $4x-y+3=0$

15.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2,1)$ y forma con la recta $y=\sqrt{3}x-2$ un ángulo de 60° . Sol: $y=1$

16.- Determina analíticamente el ángulo que forman: a) las dos bisectrices de los cuadrantes. b) El eje de abscisas con la recta $2x-y+2=0$. c) El eje de ordenadas con la recta $3x+y+4=0$. d) Las rectas: $y=x-2$ e $y=-x+3$.

Sol: a) 90° ; b) $63^\circ 26'$; c) $18^\circ 26'$; d) 90°

17.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2,-1)$ y forma un ángulo de 60° con la recta: $\{x=1-t; y=2t\}$.

$$\text{Sol: } y + 1 = \frac{8 + 5\sqrt{3}}{11} (x - 2)$$

18.- Hallar la ecuación de las rectas que pasando por $P(1,-2)$ forma un ángulo de 45° con la $2x-y+1=0$.

Sol: $x-3y-7=0$; $3x+y-1=0$

19.- Estudiar la posición de las rectas a) $x+y=3$; $x-y=2$; b) $x-2y+3=0$; $\{x=1+2t; y=t\}$.

Sol: a) Perpendiculares, se cortan; b) paralelas

20.- ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,3)$ y forma un ángulo de 90° con la recta $x-y=0$? Sol: $x+y-4=0$

Problemas con incógnitas

1.- Determina el valor de k para que los puntos $A(2,-1)$, $B(1,4)$ y $C(k,9)$ estén alineados. Sol: $k=0$

2.- Calcula el valor de a y b para que las rectas $ax-y+2=0$ y $bx+6y-9=0$ sean perpendiculares y, además, la segunda pase por el punto $P=(1,1)$.

Sol: $a=2$; $b=3$

3.- Calcula el valor de m para que las rectas $r: mx+2y+6=0$, $s: 2x+y-1=0$ y $t: x-y=5$ pasen, las tres, por un mismo punto. Sol: $m=0$; $P(2,-3)$

4.- Determina m y n sabiendo que la recta $2x+ny=0$ pasa por el punto $(1,2)$ y es paralela a la recta $mx-2y+3=0$. Sol: $m=4$; $n=-1$

5.- Dadas las rectas $r: 3x+y=3$ y $s: -2x+ay=8$. Determinar "a" para que forman un ángulo de 45° . Sol: $a=1$

6.- Hallar a para que la distancia de $O(0,0)$ a la recta $r: 2x+ay-4=0$ sea 2. Sol: $a=0$

7.- Hallar la ecuación de la recta r , que pertenece al haz definido por las rectas $r: 2x-y-11=0$ y $s: x+y-1=0$, y tal que la distancia del punto $P(2,1)$ a r es 2 u. Sol: $3x+4y=0$

8.- Dada la recta $mx-3y+m-4=0$. Calcular m para que: a) dicha recta pase por el punto $(1,-2)$. b) dicha recta sea paralela a la recta $(x-1)/3 = (y-2)/2$. Sol: a) $m=-1$; b) $m=2$

9.- Hallar el valor de A y de B para que las rectas: $Ax+2y-8=0$ y $2x+By=3$ se corten en el punto $(2,1)$. Sol: $A=3$; $B=-1$

10.- Hallar el valor de "m" para que las rectas r: $mx+2y-3=0$; s: $2x+y+1=0$ pasen por un mismo punto.

Sol: $m \neq 4$

11.- Hallar "m" y "n" sabiendo que la recta $3x+my=0$ pasa por el punto (1,3) y es paralela a la recta $nx+y-2=0$. Sol: $m=-1$; $n=-3$

12.- Calcula el valor de a y b para que las rectas $ax-3y+5=0$ y $bx+2y-1=0$ sean perpendiculares y además la segunda pase por el punto (-1,2). Sol: $b=3$; $a=2$

13.- Las rectas $2x+y-2=0$ y $Ax+y+1=0$, forman un ángulo de $\pi/3$ radianes. ¿Cuánto vale A?

Sol: $A = \frac{8 \pm 5\sqrt{3}}{11}$

14.- La recta de ecuación $x-3=0$ corta en el punto "a" a una recta que pasa por los puntos (2,3) y (-1,-3). Corta también en el punto "b" a la bisectriz del primer cuadrante. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento ab. Sol: $a(3,5)$; $b(3,3)$; mediatriz $y=4$

15.- Hallar el valor de "a" para que las rectas: r: $2x+ay+12=0$; s: $6x-2y=10$. Sean: a) Paralelas, hallando su distancia. b) Perpendiculares. Sol: a) $a=-1$; $d=5$; b) $a=6$

16.- Demuestra que todas las rectas cuyas ecuaciones se ajustan a la forma $y = ax-a$, pasan por un punto. ¿Cuáles son las coordenadas de ese punto?. Sol: $P(1,0)$

17.- Hallar "a" para que las rectas $x-2y=3$; $3x+y=2$ y $y=ax+1$ pertenezcan al mismo haz de rectas. Sol: $a=-2$

18.- Hallar m para que sean concurrentes $x-3y+1=0$, $x+y-3=0$ y $mx-y-3=0$. Sol: $m=2$; $P(2,1)$

19.- Hallar "a" para que las rectas siguientes sean paralelas: a) $ax+y=1$ y $2x-y=a$; b) $(a+2)x-2y=1$ y $3ax+(a-3)y = a$. Sol: a) $a=-2$; b) $a=1$

20.- Prueba que las rectas $y=ax+5$ e $y=(a-1)x-2$ no pueden ser ni paralelas ni perpendiculares.

21.- Halla el valor de "m" para que la recta $(x-2)/m=(y+1)/2$ sea paralela a la recta: $\{x=2t; y=t+1\}$. Sol: $m=4$

22.- Dada la recta: $mx-(3-m)y+(-m+5) = 0$. a) ¿Para qué valor de m dicha recta pasa por el punto (-2,1)? ¿Para qué valor de m la recta es paralela a la recta: $(x-2)/4 = (y-4)/2$. Sol: $m=1$; $m=1$

23.- Calcula el valor de m para que las rectas r) $mx+2y-7=0$; s) $x+2y-5=0$ y t) $x-y+1=0$, pasen por el mismo punto. Sol: $m=3$; $P(1,2)$

24.- Determinar m y n sabiendo que la recta r: $6x+ny=4$ pasa por el punto (2,-1) y es paralela a la recta s: $mx+4y-2=0$. Sol: $n=8$; $m=3$

25.- Determinar "a" para que los puntos A(1,a) y B(1,2) disten una unidad. Sol: $a=1$; $a=3$

26.- Dadas las rectas siguientes, determinar "m" para que formen un ángulo de 45° . r: $3x+y=2$; s: $2x+my=5$. Sol: $m=-1$; $m=4$

Problemas de triángulos

1.- En el triángulo de vértices A=(2,2), B=(-2,0) y C=(2,4), Halla la ecuación de las medianas.

Sol: $y=2$; $3x-4y+6=0$; $3x-2y+2=0$

2.- Halla las coordenadas de los tres vértice del triángulo ABC, sabiendo que las coordenadas de los puntos medios de sus lados son: $M=(3,3)$, $N=(2,2)$ y $P=(2,4)$.

Sol: $(1,3)$, $(3,1)$, $(3,5)$

3.- Halla los vértices del triángulo cuyos lados están sobre las rectas r , s y t de ecuaciones: $r: x=1$; $s: x+y=2$; $t: 5x+y-2=0$.

Sol: $(1,1)$; $(1,-3)$; $(0,2)$

4.- Calcula el área limitada por la recta $(x/3)+(y/6)=1$, el eje de abscisas y el eje de ordenadas. Sol: $9 u^2$

5.- Indica qué tipo de triángulo es el de vértices ABC, siendo: a) $A=(3,2)$; $B=(1,0)$; $C=(5,4)$; b) $A=(2,3)$; $B=(-1,2)$; $C=(1,6)$; c) $A=(1,3)$; $B=(5,1)$; $C=(2,5)$.

Sol: a) Isósc.; b) Isósc. rectángulo; c) Rectángulo

6.- Calcula el área del triángulo que tiene sus vértices en los puntos $A=(1,4)$, $B=(3,-2)$ y $C=(-1,0)$.

Sol: $10 u^2$

7.- Halla las coordenadas del baricentro (punto de corte de las medianas), del triángulo de vértices:

$A=(0,2)$, $B=(-3,4)$ y $C=(3,0)$. Sol: $(0,2)$

8.- Halla las ecuaciones de las alturas del triángulo que determinan los puntos $A=(1,0)$, $B=(-3,2)$ y

$C=(-1,-2)$ y determina el ortocentro. Sol: $2x-y=0$; $x+y+1=0$; $-x+2y+1=0$; $(-1/3,-2/3)$

9.- En el triángulo de vértices $A=(3,6)$ y $B=(5,2)$ y $C=(1,-2)$. Determina: a) el baricentro; b) el ortocentro; c) el circuncentro. Sol: a) $(3,2)$; b) $(23/3,4/3)$; c) $(2/3,7/3)$

10.- Busca una recta r que determine con las rectas $x-2y+2=0$ y $2x-y-2=0$ un triángulo isósceles que tenga el baricentro en el punto $G=(1,1)$. Sol: $x+y=1$

11.- Calcula el área del triángulo formado por las rectas $3x+y-8=0$; $5x-3y+10=0$ y $x-2y+2=0$. Sol: 7

12.- Encuentra las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices: $A=(1,1)$, $B=(1,-3)$ y $C=(3,5)$.

Sol: $3x-y=4$; $y=1$; $6x-y=9$

13.- Se considera el triángulo de vértices $A(1,1)$, $B(5,0)$ y $C(-3,5)$. Determinar: a) Las ecuaciones de los lados. b) El ángulo B. c) Las coordenadas del ortocentro, baricentro y circuncentro.

Sol: a) $x+y-2=0$; $x+4y=5$; $5x+8y=25$; b) $17^\circ 9'$; c) $(-22/3,-37/3)$; $(1,2)$; $(31/6,55/6)$.

14.- El punto $A(2,-1)$ es vértice del triángulo ABC. Las ecuaciones de las rectas que contienen a las alturas son: $3x-y=0$ y $x-4y+1=0$, respectivamente. Hallar la ecuación del lado a y los vértices.

Sol: $3x-2y+3=0$; $B(1,3)$; $C(-1,0)$

15.- Averiguar si el triángulo ABC, donde $A(-1,3)$, $B(4,8)$ y $C(-6,-2)$, es isósceles y si el de vértices $A'(2,1)$, $B'(3,-1)$ y $C'(6,3)$ es rectángulo.

Sol: ABC es isósceles y $A'B'C'$ es rectángulo en A' .

16.- Los puntos $A(2,1)$ y $B(1,3)$ son vértices del triángulo ABC. Si el ortocentro es el punto $M(4/3,5/3)$, hallar las coordenadas del vértice C. Sol: $(-2,0)$

17.- Los puntos $B(1,4)$ y $C(8,3)$ son vértices de un triángulo rectángulo. Si BC es la hipotenusa, hallar el vértice A, sabiendo que está en la recta $y=x-1$. Sol: $(2,1)$, $(7,6)$

18.- Los lados de un triángulo son a: $x+y=4$ b: $3x+y-4=0$ y c: $y-1=0$. Hallar el área de cada uno de los triángulos en que el primitivo es descompuesto por la bisectriz del primer cuadrante.

Sol: $\text{área}_1 = 1 u^2$; $\text{área}_2 = 2 u^2$.

19.- Hallar las ecuaciones de la recta que pasando por el punto $A(-3,8)$, forma con $+OX$ y $+OY$ un triángulo de área $6 u^2$.

Sol: $4x+3y-12=0$; $16x+3y+24=0$

20.- Los puntos $A(1,2)$, $B(3,0)$ y $C(5,1)$ son vértices de un triángulo. Probar que el ortocentro, circuncentro y baricentro están alineados.

21.- Dados los puntos $A(-1,-1)$ y $B(2,1)$, hallar sobre la recta $r: y = x + 2$ un punto P tal que con los dados determine un triángulo de área $4 u^2$. Sol: $(1,3)$; $(-15,-13)$

22.- Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos: $A(1,3)$, $B(3,5)$ y $C(4,0)$. Sol: $6 u^2$

23.- a) Indica que tipo de triángulo es el de vértices A,B,C siendo $A(3,4)$, $B(0,0)$ y $C(4,3)$. b) Hacer lo mismo para los vértices: $A(1,3)$, $B(-3,1)$ y $C(0,0)$. Sol: a) Isósceles; b) Isósceles rectángulo.

24.- En el triángulo de vértices $A(2,2)$, $B(6,8)$ y $C(-2,2)$. Hallar el baricentro, el ortocentro y el circuncentro. Sol: Bar: $(2,4)$; Ort: $(6,-10/3)$; Cir: $(0,23/3)$

25.- Hallar el área del triángulo formado por las rectas $y=-1$; $5x-3y+7=0$; $5x+2y=13$. Sol: $25/2$

26.- Dado el triángulo de vértices $A(0,3)$; $B(3,1)$, $C(2,5)$. Se pide: a) Ecuación de la altura correspondiente al vértice A ; b) Ecuación de la mediana correspondiente al vértice B ; c) Área del triángulo.

Sol: a) $x-4y+12=0$; b) $3x+2y=11$; c) $5 u^2$

27.- Dado el triángulo de vértices $A(1,0)$ $B(3,2)$ y $C(-1,3)$. Hallar: a) Ecuación de la mediana del lado AB . b) Ecuación de la paralela a la mediana anterior por el origen de coordenadas. c) Área del triángulo. Sol: a) $2x+3y=7$; b) $2x+3y=0$; c) $A = 5u^2$

28.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2,2)$ y que determina al cortar a los ejes coordenados un triángulo de área $9 u^2$. Sol: $2x+y-6=0$; $x+2y-6=0$

29.- De un triángulo ABC se conocen los puntos medios de sus lados: $pm AB = M(2,2)$; $pm BC = N(0,3)$; $pm CA = P(-1,3)$. Hallar las coordenadas de los vértices del triángulo y el baricentro.

Sol: $A(1,2)$; $B(3,2)$; $C(-3,4)$; Bar: $(1/3,8/3)$

30.- Construye un triángulo cuyos lados estén sobre las rectas $x+2y-5=0$; $x+5y-8=0$ y $x-y+4=0$ y calcula las coordenadas de sus vértices.

Sol: $(-1,3)$ $(3,1)$ $(-2,2)$

31.- Dados los puntos $A(2,1)$; $B(1,3)$ y $C(-2,-1)$. Calcular el área del triángulo de vértices ABC . Sol: $5 u^2$

32.- a) Calcula el baricentro y los puntos medios de los lados del triángulo de vértices $A(1,3)$, $B(-3,5)$, $C(2,1)$. b) Ecuación vectorial de la recta que pasa por $A(2,1)$ y es paralela a la recta $x+2y-1=0$.

Sol: a) $B(0,3)$; $(-1,4)$, $(-1/2,3)$, $(3/2,2)$, $(-1/2,3)$; b) $(x,y)=(2,1)+\lambda(2,-1)$

33.- a) En el triángulo de vértices $A(2,-1)$, $B(2,5)$, $C(0,4)$: a) escribir en forma paramétrica la altura correspondiente al vértice A . b) Hallar la distancia del punto $A(1,-1)$ a la recta $-3x+4y-18=0$.

Sol: a) $\{x=2-\lambda, y=-1+2\lambda\}$; b) $d=5$

34.- Dadas las rectas: $2x-3y=3$; $3x-y-1=0$; $\{x=3-4t; y=1+2t\}$. Calcula el área del triángulo que determinan.

Sol: $5/2$

35.- Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos: $A(3,1)$, $B(4,2)$, $C(0,5)$. Sol: $7/2 u^2$

36.- Comprobar si es isósceles el triángulo de vértices: $A(3,1)$, $B(1,3)$ y $C(5,5)$. Sol: Sí

37.- Decir que tipo de triángulo tiene de vértices: $A(1,4)$, $B(3,1)$ y $C(7,8)$. Sol: rectángulo

38.- Calcula el valor de a y de b para que $r: ax+2y-12=0$ y $s: 2x+by=1$ se corten en el punto $(2,3)$.
Sol: $a=3; b=-1$

Problemas de figuras geométricas

1.- Los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo. Compruébalo con el cuadrilátero de vértices: $A=(4,2); B=(2,0); C=(0,2)$ y $D=(8,4)$.

2.- Calcula el vértice D del paralelogramo $ABCD$, sabiendo que $A=(1,-2); B=(3,-1)$ y $C=(0,3)$.
Sol: $D=(-2,2)$

3.- Un rombo $ABCD$, tiene su vértice A en el eje de ordenadas y otros dos vértices opuesto son $B=(1,4)$ y $D=(3,2)$. Determina: a) las coordenadas de los vértices A y C ; b) el ángulo que forman sus lados; c) cuánto vale su área. Sol: a) $A(0,1); C(4,5)$; b) $53^\circ; 127^\circ$; c) $A=8 \text{ u}^2$

4.- Dos lados de un paralelogramo están sobre $r: y=3x+9$ y $s: 2x+5y+6=0$ y tiene un vértice en el punto $(3,1)$. Halla las ecuaciones de las rectas de los otros dos lados y las coordenadas del resto de sus vértices. Sol: $y=3x-8; 2x+5y=11; (-2,3), (-3,0), (2,-2)$

5.- Un cuadrado de vértice A en el punto $(0,1)$ y su centro el punto $(2,1)$. Calcula las coordenadas de los otros tres vértices. Sol: $(2,3), (4,1), (2,-1)$

6.- Conocemos dos vértices de un rectángulo, $A=(1,3)$ y $B=(3,1)$, y sabemos que uno de sus lados está sobre la recta $y+x=6$. Calcula las coordenadas de los otros dos vértices. Sol: $(2,4) (4,2)$

7.- Un cuadrado tiene por vértices contiguos los puntos $A=(3,2)$ y $B=(4,1)$. Calcula sus otros dos vértices. ¿Cuántas soluciones tiene el problema?. Sol: Dos soluciones: $C(2,1), D(3,0); C'(4,3), D'(5,2)$

8.- De un cuadrado conocemos dos vértices opuestos $A=(1,2)$ y $C=(3,6)$. Calcula sus otros dos vértices. ¿Cuántas soluciones tiene el problema?.
Sol: Una solución $B(0,5), D(4,3)$

9.- Calcula el área del cuadrilátero de vértices $A=(2,0), B=(4,4), C=(0,3)$ y $D=(-2,-1)$. Sol: $A=14 \text{ u}^2$

10.- El punto $A(2,1)$ es uno de los vértices de un paralelogramo. Dos de sus lados están situados en las rectas $r: x/3+y/-1=1$ y $s: x+y+1=0$. Hallar las coordenadas de los vértices y las ecuaciones de los otros lados. Sol: $(3,0), (0,-1), (-1,0); x+y-3=0; x-3y+1=0$.

11.- Los puntos $A(0,1)$ y $D(4,3)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo. El punto $M(3,1)$ es el punto de intersección de las diagonales. Hallar las coordenadas de los otros vértices B y C , las ecuaciones de los lados, el área del paralelogramo.
Sol: $C(6,1), B(2,-1); AB: x+y=1; CD: x+y=7; AD: x-2y+2=0; BC: x-2y-4=0; A=12 \text{ u}^2$

12.- Los puntos $A(0,0)$ y $C(1,7)$ son vértices opuestos de un rectángulo. Un lado está situado sobre la recta $x-3y=0$. Hallar las coordenadas de los vértices B y D y las ecuaciones de los lados.
Sol: $B(-2,6); D(3,1). AB: 3x+y=0; BC: x-3y+20=0; AD: x-3y=0; CD: 3x+y=10$.

13.- Determinar las coordenadas de los vértices B y D del cuadrado que tiene por diagonal AC , donde $A(1,2)$ y $C(5,2)$. Sol: $B(3,0); D(3,4)$.

14.- El centro de un cuadrado es el punto $P(2,2)$ y un vértice $A(2,1)$. Hallar las coordenadas de los otros dos vértices y el área del cuadrado.
Sol: $C(3,2) B(1,2) D(2,3); \text{área}=2 \text{ u}^2$

15.- Dos vértices opuestos de un rombo son los puntos A(5,5) y C(-1,-1); la longitud de la otra diagonal es $2\sqrt{2}$ dm. Hallar las coordenadas de B y D y el área del rombo.

Sol: B(3,1); D(1,3); área= 12 dm^2

16.- Dos lados de un hexágono regular están sobre las rectas r: $3x-4y+12=0$ y s: $3x-4y+2=0$. Hallar su área. Sol: 23 u^2

17.- Los puntos A(1,2) y B(0,3) son vértices consecutivos de un paralelogramo. El lado BC está sobre la recta r: $x-3y+9=0$ y el punto de intersección de las diagonales es M(2,3). Hallar los otros dos vértices.

Sol: C(3,4); D(4,3)

18.- Los puntos A(2,2) y C(0,4) son vértices opuestos de un rombo. El vértice D está situado sobre la recta r: $2x-y-1=0$. Hallar las coordenadas de D y las del cuarto vértice, B. Sol: B(-1,1), D(3,5)

19.- Los puntos A(1,1) y B(3,3) son vértices consecutivos de un rectángulo. Sabiendo que el vértice D, opuesto al B, está sobre la recta $x+3y+2=0$, hallar las coordenadas de los vértices C y D.

Sol: C(6,0), D(4,-2)

20.- El lado AB del cuadrado ABCD está sobre la recta r: $4x+3y=10$. Si el centro del cuadrado es el punto M(9/2,3/2), hallar los vértices. Sol: (1,2), (4,-2), (5,5), (8,1)

21.- Hallar las coordenadas del vértice D y las ecuaciones de los lados del paralelogramo de vértices: A(2,2), B(1,3) y C(3,5). Sol: D(4,4); $x+y=4$; $x+y=8$; $x-y=0$; $x-y+2=0$

22.- Un rombo A,B,C,D tiene su vértice A en el eje de abscisas y otros 2 vértices opuestos son B(0,2) y D(4,6). Determina: a) Las coordenadas de los vértices A y C. b) El ángulo que forman sus lados. c) El área.

Sol: a) A(4,0); C(-1,6); b) 120° , 60° ; c) $A = \sqrt{610} \text{ u}^2$

23.- El eje OX y las rectas $y=2$; $2x-y=0$; $2x-y=-2$, limitan un cuadrilátero. a) Hallar su área, b) las ecuaciones de sus diagonales y c) las coordenadas del punto de intersección de éstas. Sol: a) $A=2\text{u}^2$; b) $x=0$; $x-y+1=0$; c) (0,1)

24.- Un cuadrado tiene por vértices contiguos los puntos A(0,3) y B(2,5). Calcula sus otros 2 vértices. ¿Cuántas soluciones tiene el problema?

Sol: Dos soluciones: C(-2,5), D(0,7); C'(2,1), D'(4,-1)

25.- De un cuadrado conocemos 2 vértices opuestos A(1,2) y B(8,3) Hallar sus otros dos vértices. Sol: (4,6), (5,-1)

26.- Los puntos A(3,0), B(1,3) y C(5,2) son tres vértices consecutivos de un paralelogramo. a) Halla el cuarto vértice; b) Halla la recta que pasa por B y es paralela al eje OX. Sol: a) (7,-1); b) $y=3$

27.- Dos vértices de un paralelogramo están sobre las rectas $2x+3y-9=0$ y $3x-2y+6=0$ el vértice no situado en dichas rectas es el punto (1,-2). Halla las ecuaciones de los otros lados y coordenadas de los vértices restantes. Sol: (-2,0), (0,3), (3,1); $3x-2y=7$; $2x+3y+4=0$

28.- Dos lados de un paralelogramo están sobre las rectas que tienen de ecuaciones $y=2x$ e $y=-x$, sabiendo que el centro del paralelogramo es M(2,1). Determinar los vértices. Sol: (0,0), (2,4), (4,2), (2,-2)

29.- ¿Las rectas $2x+3y-4=0$, $x-2y-2=0$, $-4x-6y+22=0$ y $2x-4y+10=0$ determinan un paralelogramo?. En caso afirmativo calcular sus vértices. Sol: (-1,2), (1,3), (4,1), (2,0)

30.- Se tiene el cuadrilátero ABCD con A(3,2); B(1,-2); C(-1,-1); D(1,3). Comprueba que es un paralelogramo y calcula su centro y su área. Sol: (1,1/2); $A = 10 \text{ u}^2$

31.- Encuentra las ecuaciones correspondientes a los lados de un paralelogramo donde los vértices conocidos son: $A(0,0)$, $B(-1,2)$, $C(3,2)$. Sol: $2x+y=0$; $2x+y-8=0$; $y=2$; $y=0$

32.- Dados los vértices de un cuadrilátero ABCD siendo $A(1,3)$, $B(5,7)$, $C(7,5)$, $D(3,1)$. Calcula los puntos medios de sus lados y comprueba que forman un paralelogramo. Sol: $(3,5)$, $(6,6)$, $(5,3)$, $(2,2)$